



مجموعه اعداد و رابطه بین آن‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱) اگر مجموعه‌های $A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in N \right\}$ و $B = \left\{ \frac{x}{8} \mid x \in N \right\}$ مفروض باشند، کدام یک از

سراسری-۱۳۹۶

مجموعه‌های زیر متناهی است؟

$A \cup B$ (۴)

$A \cap B$ (۳)

$B - A$ (۲)

$A - B$ (۱)

۲) اگر A مجموعه‌ی اعداد اول و B مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد باشند، کدام یک از مجموعه‌های زیر

خارج از کشور-۱۳۹۶

متناهی است؟

$A - B$ (۴)

$B - A$ (۳)

$A \cap B$ (۲)

$A \cup B$ (۱)

۳) اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد و B مجموعه‌ی اعداد اول باشند، کدام مجموعه متناهی و

خارج از کشور-۱۳۹۱

غیر تهی است؟

$A - (A \cup B)$ (۴)

$A \cap B$ (۳)

$B - A$ (۲)

$A - B$ (۱)

۴) اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی که بر ۶ بخش پذیرند، B مجموعه‌ی اعداد طبیعی دو رقمی کمتر از

خارج از کشور-۱۳۹۵

۴۰ که بخش پذیر بر ۳ باشند. مجموعه‌ی $B - A$ چند عضو دارد؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۵) اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و B مجموعه‌ای متناهی باشد، کدام مجموعه نامتناهی است؟

خارج از کشور-۱۳۹۲

$(A - B) - A$ (۴)

$A - B$ (۳)

$B - A$ (۲)

$A \cap B$ (۱)



جبر مجموعه ها و تعداد اعضای مجموعه ها

۶ اجتماع دو مجموعه ی A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه های $(A - B)$ و $(B - A)$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه های A و B ، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه ی اشتراک آن ها ۴ عضو کم می شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه ی جدید، کدام است؟ سراسری-۱۳۹۴

۲۶ (۴)

۲۴ (۳)

۲۳ (۲)

۲۲ (۱)

۷ مجموعه ی A دارای ۳۶ عضو و مجموعه ی B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آن ها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه ی A حذف شود، از اشتراک آن ها ۹ عضو حذف می شود، تعداد عضوهای اجتماع مجموعه ی جدید با مجموعه ی B ، کدام است؟ خارج از کشور-۱۳۹۴

۴۵ (۴)

۴۲ (۳)

۴۱ (۲)

۴۰ (۱)

۸ اگر $A \cap B = \emptyset$ و $A \cap C = \emptyset$ ، آن گاه کدام نتیجه گیری درست است؟ سراسری-۱۳۹۲

 $A \cap (B - C) \neq \emptyset$ (۴)

 $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ (۳)

 $B \cap C \neq \emptyset$ (۲)

 $B \cap C = \emptyset$ (۱)

۹ اگر $A = \{۲, ۳, ۶, ۷, ۸\}$ و $B = \{۲, ۴, ۵, ۶\}$ باشند، مجموعه ی $(A \cup B) - [A - (A \cap B)]$ چند عضو دارد؟ سراسری-۱۳۹۳

۵ (۴)

۴ (۳)

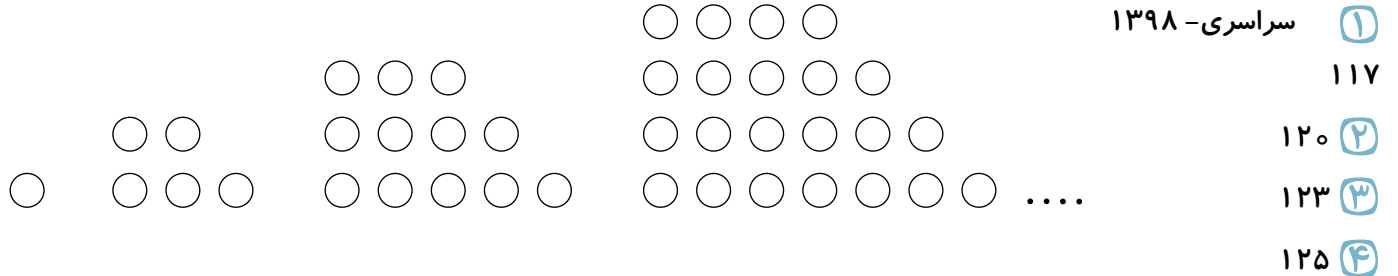
۳ (۲)

۲ (۱)



الگو - الگوی خطی - الگوی غیرخطی

۱۰ در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل نهم، کدام است؟



۱۱ اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، یعنی $\{1\}, \{3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \dots$. در این صورت جمله آخر واقع در دسته شماره چهل کدام است؟

- ۱۵۶۳ ① ۱۵۸۹ ② ۱۶۳۹ ③ ۱۶۵۱ ④

۱۲ در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل دوازدهم، کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۸

- ۳۴ ① ۳۶ ② ۳۸ ③ ۴۰ ④

۱۳ در یک دنباله‌ی اعداد $a_1 = 3$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} - 2$ ، حاصل $a_8 - a_7$ ، کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۵

- ۳۲ ① ۴۸ ② ۵۶ ③ ۶۴ ④

۱۴ فرض کنید جمله صدم دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1$ با شرط $a_1 = 1$ ، برابر $\frac{k}{m}$ باشد جمله نود و هشتم دنباله کدام است؟

سراسری - ۱۴۰۰

- $\frac{k-m}{2m-k}$ ① $\frac{k-2m}{k-m}$ ② $\frac{k-m}{k-2m}$ ③ $\frac{2m-k}{k-m}$ ④



دنباله‌ها و جمله عمومی دنباله‌ها

۱۵ در دنباله‌ی اعداد $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ، جمله‌ی دهم، کدام است؟ خارج از کشور - ۱۳۹۴

۱۰۲۳ (۴)

۱۰۱۵ (۳)

۹۸۷ (۲)

۹۷۹ (۱)

۱۶ دنباله $a_n = \begin{cases} 2^k & n = 3k \\ -2k + 4 & n = 3k + 1 \\ \left[\frac{n}{k+2}\right] + a & n = 3k + 2 \end{cases}$ به ازای اعداد حسابی n مفروض است. اگر

مجموع ۱۰ جمله اول این دنباله ۱۹ باشد، حاصل عبارت $a_2 + a_5 + a_8 + \dots + a_{29}$ کدام است؟

سراسری - ۱۴۰۰

۱ (۴)

۲ (۳)

صفر (۲)

-۲ (۱)

دنباله حسابی

۱۷ در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع چهار جمله‌ی اول ۱۵ و مجموع پنج جمله‌ی بعدی آن ۳۰ می‌باشد.

خارج از کشور - ۱۳۸۵

جمله‌ی یازدهم این دنباله کدام است؟

۹ (۴)

۸٫۵ (۳)

۸ (۲)

۷٫۵ (۱)

۱۸ کارفرمایی به یک کارگر مبتدی، در هفته اول ۷۵۰ واحد پول دستمزد می‌دهد. متعهد می‌شود که در

صورت رضایت کاری در پایان هر هفته، ۲۵ واحد پول بر دستمزد وی اضافه کند تا به دستمزد ثابت ۲۰۰۰

واحد پول برسد. با رضایت کاری پس از چند هفته، به دستمزد ثابت می‌رسد؟ سراسری - ۱۳۹۵

۵۱ (۴)

۵۰ (۳)

۴۹ (۲)

۴۸ (۱)

۱۹ اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد،

یعنی $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \dots$ در دسته نهم، واسطه حسابی بین دو عدد اول و آخر آن، کدام است؟

سراسری - ۱۳۹۹

۷۴ (۴)

۷۳ (۳)

۷۲ (۲)

۷۱ (۱)



دنباله هندسی

۲۰ در یک دنباله هندسی ۶ جمله‌ای، مجموع دو جمله اول ۸۱ و مجموع دو جمله آخر ۱۶ می‌باشد. مجموع این ۶ جمله، کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۴

۱۱۵ (۴)

۱۲۴ (۳)

۱۲۸ (۲)

۱۳۳ (۱)

۲۱ اگر $52 = \frac{3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} + 3^{x+5}}{2^{x-2} + 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3}}$ باشد مقدار x کدام است؟

سراسری - ۱۴۰۰

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

مسائل ترکیبی دنباله‌های حسابی و هندسی

۲۲ در یک دنباله حسابی، جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. چندمین جمله این دنباله حسابی، صفر است؟

سراسری - ۱۳۸۸

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

۲۳ در یک دنباله هندسی، «جمله دوم»، «دو برابر جمله پنجم» و «جمله هشتم» می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۲

$7 + 4\sqrt{3}$ (۴)

$5 + 4\sqrt{3}$ (۳)

$5 + 2\sqrt{3}$ (۲)

$2 + \sqrt{3}$ (۱)

۲۴ جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی هندسی باشند، قدرنسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

سراسری - ۱۳۹۲

$\frac{7}{3}$ (۴)

$\frac{9}{4}$ (۳)

$\frac{7}{4}$ (۲)

$\frac{5}{4}$ (۱)



۲۵) جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی، هستند. قدرنسبت دنباله هندسی، کدام است؟
خارج از کشور - ۱۳۹۹

$$\frac{9}{4} \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۱)$$



پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱ ابتدا اعضای دو مجموعه را مشخص می‌کنیم:

$$A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in N \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \dots \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{x}{8} \mid x \in N \right\} = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8}, \frac{9}{8}, \frac{10}{8}, \dots \right\}$$

تمام اعضای مجموعه‌ی A کوچکتر یا مساوی یک هستند ولی در مجموعه‌ی B فقط ۸ عضو این ویژگی را دارند پس اشتراک این دو مجموعه قطعاً محدود است.

$$A \cap B = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots \right\} \cap \left\{ \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8}, \frac{9}{8}, \frac{10}{8}, \dots \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right\}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲

$$\text{مجموعه‌ی اعداد اول: } A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$$

$$\text{مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد: } B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$$

غیر از عدد ۲ که زوج است تمام اعداد اول، فرد هستند پس غیر از عدد ۲ تمام اعضای مجموعه‌ی A در مجموعه‌ی B وجود دارند بنابراین: $A - B = \{2\}$ است که متناهی می‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

مجموعه‌ی A به صورت $A = \{1, 3, 5, \dots\}$ و مجموعه‌ی B به صورت $B = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ است.

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

نامتناهی و غیرتهی $A - B = \{1, 9, 15, 21, \dots\}$:گزینه‌ی اولمتناهی و غیرتهی $B - A = \{2\}$:گزینه‌ی دومنامتناهی و غیرتهی $A \cap B = \{3, 5, 7, \dots\}$:گزینه‌ی سومنامتناهی $A - (A \cup B) = \emptyset$:گزینه‌ی چهارمچون $A \subset (A \cup B)$ است، بنابراین مجموعه‌ی $A - (A \cup B)$ تهی است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴

$$A = \{6, 12, 18, \dots\}, B = \{12, 15, 18, \dots, 39\}$$

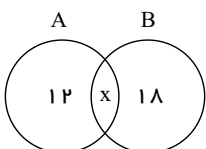
 $A - B$ اعضای A هستند که در A نباشند، یعنی اعضای B که بر ۶ بخش پذیر نباشند. می‌دانیم اعضای B بر ۳ بخش پذیرند، پس برای آن که بر ۶ بخش پذیر نباشند باید مضرب ۲ نباشند، پس کافی است اعضای فرد B را جدا کنیم:

$$B - A = \{15, 21, 27, 33, 39\} \Rightarrow \text{۵ عضو دارد.}$$

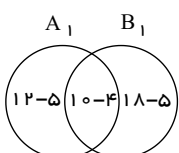
۱ ۲ ۳ ۴ ۵ بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱): چون $A \cap B \subset B$ ، پس تعداد اعضای $A \cap B$ کم‌تر یا مساوی تعداد اعضای B اند و چون B مجموعه‌ای متناهی است، بنابراین $A \cap B$ نیز حتماً متناهی است.گزینه‌ی (۲): $B - A \subset B$ و B مجموعه‌ای متناهی است. پس $B - A$ نیز مجموعه‌ای متناهی خواهد بود.گزینه‌ی (۳): A نامتناهی و B متناهی است، پس در مجموعه‌ی $A - B$ از نامتناهی عضو تعداد متناهی عضو را برمی‌داریم، در نتیجه نامتناهی عضو باقی می‌ماند. یعنی $A - B$ مجموعه‌ای نامتناهی است.گزینه‌ی (۴): $A - B \subset A$ ، پس $(A - B) - A = \emptyset$ و در نتیجه فاقد عضو است، یعنی مجموعه‌ای متناهی می‌باشد.

باتوجه به اطلاعات مسئله، نمودار ون مقابل را داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۶



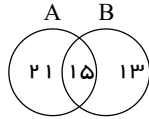
$$\rightarrow 12 + x + 18 = 40 \Rightarrow x = 40 - 30 = 10 \Rightarrow n(A \cap B) = 10$$

در برداشتن ۹ عضو از هر یک از مجموعه‌های A و B ، چون از مجموعه‌ی $A \cap B$ ، ۴ عضو کم می‌شود، پس ۵ عضو دیگر از $A - B$ و $B - A$ کم می‌شود:

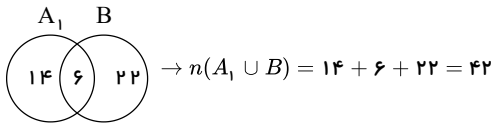
$$\Rightarrow n(A_1 \cup B_1) = (12 - 5) + (10 - 4) + (18 - 5) = 7 + 6 + 13 = 26$$



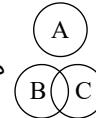
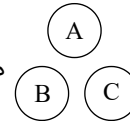
باتوجه به اطلاعات مسئله، نمودار ون مقابل را داریم:



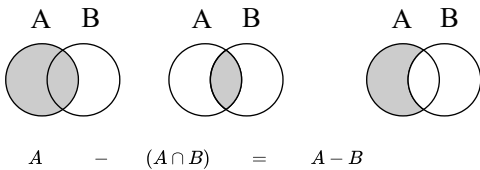
حال وقتی ۱۶ عضو از مجموعه A حذف شود، ۹ عضو از $A \cap B$ حذف می‌شود، یعنی ۹ عضو از این ۱۶ عضو با ۱۶ نیز مشترک است و حذف می‌شوند. پس تنها $15 - 9 = 6$ عضو از مجموعه A جدید (A_1) با B مشترک است و توجه کنید تعداد اعضای مجموعه B نباید تغییر کنند.



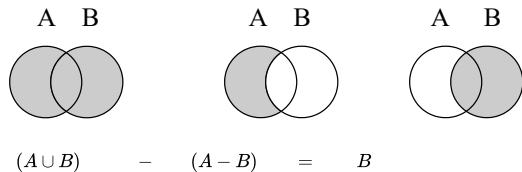
به بررسی هر ۴ گزینه می‌پردازیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۸

گزینه اول: سه مجموعه A و B و C را به صورتگزینه دوم: سه مجموعه A و B و C را به صورتگزینه سوم درست است. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ گزینه چهارم نادرست است. $A \cap (B - C) = A \cap (B \cap C') = \underbrace{(A \cap B)}_{\emptyset} \cap C' = \emptyset \cap C' = \emptyset \rightarrow$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹



$$A - (A \cap B) = A - B$$



$$(A \cup B) - (A - B) = B$$

$$A - (A \cap B) = A - B \Rightarrow (A \cup B) - (A - (A \cap B)) = (A \cup B) - (A - B) = B$$

و مجموعه B ، دارای ۴ عضو است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

... ، $4 + 5 + 6 + 7$: شکل چهارم ، $3 + 4 + 5$: شکل سوم ، $2 + 3$: شکل دوم ، 1 : شکل اول

پس تعداد نقطه‌ها در شکل نهم می‌شود:

$$9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 = 117$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

دسته اول: $\{1\}$ دسته دوم: $\{3, 5\}$ دسته سوم: $\{7, 9, 11\}$ دسته چهارم: $\{13, 15, 17, 19\}$ بنابراین دنباله جملات آخر دسته‌ها به صورت $1, 5, 11, 19, \dots$ است که می‌توان به صورتنوشت یعنی جمله عمومی $a_n = n(n+1) - 1$ است، پس:

$$a_{40} = 40(41) - 1 = 1640 - 1 = 1639$$

تعداد دایره‌ها با یکدیگر تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۳ می‌دهند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad 5, 8, 11, \dots \rightarrow a_{12} = 5 + 11(3) = 5 + 33 = 38$$



۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned}
 n=2 &\rightarrow a_2 = 2a_1 - 2 = 2(3) - 2 = 4 \\
 n=3 &\rightarrow a_3 = 2a_2 - 2 = 2(4) - 2 = 6 \\
 n=4 &\rightarrow a_4 = 2a_3 - 2 = 2(6) - 2 = 10 \\
 n=5 &\rightarrow a_5 = 2a_4 - 2 = 2(10) - 2 = 18 \\
 n=6 &\rightarrow a_6 = 2a_5 - 2 = 2(18) - 2 = 34 \\
 n=7 &\rightarrow a_7 = 2a_6 - 2 = 2(34) - 2 = 66 \\
 n=8 &\rightarrow a_8 = 2a_7 - 2 = 2(66) - 2 = 130 \\
 \text{پس: } a_8 - a_7 &= 130 - 66 = 64
 \end{aligned}$$

۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned}
 a_{100} &= \frac{1}{a_{99}} + 1 \frac{k}{m} = \frac{1}{a_{99}} + 1 \Rightarrow \frac{1}{a_{99}} = \frac{k}{m} - 1 \\
 \Rightarrow \frac{1}{a_{99}} &= \frac{k-m}{m} \Rightarrow a_{99} = \frac{m}{k-m} \\
 a_{99} &= \frac{1}{a_{98}} + 1 \Rightarrow \frac{m}{k-m} = \frac{1}{a_{98}} + 1 \Rightarrow \frac{1}{a_{98}} = \frac{m}{k-m} - 1 \\
 \Rightarrow \frac{1}{a_{98}} &= \frac{m-k}{k-m} \Rightarrow a_{98} = \frac{k-m}{m-k}
 \end{aligned}$$

۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1 = 2^1 - 1 \\
 a_2 &= 2a_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3 = 2^2 - 1 \\
 a_3 &= 2a_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7 = 2^3 - 1 \\
 a_4 &= 2a_3 + 1 = 2(7) + 1 = 15 = 2^4 - 1
 \end{aligned}$$

بنابراین جمله ی دهم، برابر $2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$ است.۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا به کمک مجموع ۱۰ جمله اول، a را می یابیم:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 19 \Rightarrow 1 + 4 + 1 + a + 2 + 2 + 1 + a + 4 + 0 + 2 + a + 8 = 19 \Rightarrow 3a + 25 = 19 \Rightarrow a = -2$$

$$a_2 + a_5 + a_8 + \dots + a_{29} = \left(\left[\frac{2}{2}\right] + a\right) + \left(\left[\frac{5}{3}\right] + a\right) + \left(\left[\frac{8}{4}\right] + a\right) + \dots + \left(\left[\frac{29}{11}\right] + a\right) = 1 + 1 + \underbrace{2 + 2 + 2 + \dots + 2}_{\text{تا } 8} + 10a = 18 - 20 = -2$$

۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 30 \end{cases} &\xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} (-5) \times \begin{cases} 4a_1 + 6d = 15 \\ 5a_1 + 30d = 30 \end{cases} \\
 \Rightarrow \begin{cases} -20a_1 - 30d = -75 \\ 5a_1 + 30d = 30 \end{cases} &\Rightarrow -15a_1 = -45 \Rightarrow a_1 = 3, d = \frac{1}{2} \\
 a_{11} = a_1 + 10d &= 3 + 10\left(\frac{1}{2}\right) = 8
 \end{aligned}$$

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴ این مسأله نشان دهنده یک دنباله حسابی با جمله $a_1 = 750$ و قدر نسبت $d = 25$ و جمله آخر $a_n = 2000$ است:

$$750, 775, \dots, 2000$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 2000 = 750 + (n-1)(25) \rightarrow 2000 = 750 + 25n - 25$$

$$\rightarrow 25n = 2000 - 750 + 25 \rightarrow 25n = 1275 \rightarrow n = \frac{1275}{25} = 51$$

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴ آخرین عدد دسته هشتم، $8^2 = 64$ است بنابراین دسته نهم از ۶۵ شروع می شود.

$$\{65, \dots, 81\} \rightarrow b, a \text{ واسطه حسابی بین دو عدد } = \frac{a+b}{2} \rightarrow \text{واسطه حسابی} = \frac{65+81}{2} = \frac{146}{2} = 73$$

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 81 \xrightarrow{a_n = a_1 q^{n-1}} a_1 + a_1 q = 81 \Rightarrow a_1(1+q) = 81 \quad (1) \\ a_5 + a_6 = 16 \xrightarrow{a_n = a_1 q^{n-1}} a_1 q^4 + a_1 q^5 = 16 \Rightarrow a_1 q^4(1+q) = 16 \quad (2) \end{cases}$$

حال دو عبارت به دست آمده را بر هم تقسیم می کنیم، در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow \frac{a_1(1+q)}{a_1 q^4(1+q)} = \frac{81}{16} \Rightarrow q^4 = \frac{16}{81}$$



$$\text{مجموع شش جمله} = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}_{16} = 97 + a_7 + a_8$$

$$97 + a_1 q^2 + a_1 q^3 = 97 + a_1 q^2(1 + q) \stackrel{a_1(1+q)=16}{=} 97 + 16q^2$$

$$97 + 16\sqrt{q^2} = 97 + 16\sqrt{\frac{16}{16}} = 97 + 16\left(\frac{4}{4}\right) = 97 + 16 = 113$$

۲۱ از فاکتورگیری استفاده می کنیم.

$$\frac{3^x(1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243)}{3^x\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + 1 + 3 + 9 + 27\right)} = 52$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \times \frac{364}{\frac{63}{2}} = 52 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{63 \times 52}{364 \times 2}$$

$$\xrightarrow{364=52 \times 7} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{9}{4} \Rightarrow x = 2$$

۲۲ ۱ ۲ ۳ ۴

در هر دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدر نسبت d ، جمله n ام از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ به دست می آید و اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند آن گاه $b^2 = ac$ است.

$$a_3, a_4, a_5 \Rightarrow a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} (a_1 + 2d)(a_1 + 4d) = (a_1 + 3d)^2 \Rightarrow a_1^2 + 4a_1d + 2a_1d + 12d^2 = a_1^2 + 6a_1d + 9d^2$$

$$\Rightarrow 20d^2 + 2a_1d = 0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } 2d} 10d + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -10d$$

۲۳ ۱ ۲ ۳ ۴

اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آن گاه $a + c = 2b$ است و در یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q ، جمله n ام از رابطه $a_n = a_1 q^{n-1}$ به دست می آید.

$$a_7, 2a_8, a_8 \Rightarrow a_1 q^6, 2a_1 q^7, a_1 q^8 \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} a_1 q + a_1 q^7 = 4a_1 q^6 \xrightarrow{\div a_1 q} 1 + q^6 = 4q^5 \Rightarrow q^6 - 4q^5 + 1 = 0$$

$$q^3 = A \xrightarrow{\quad} A^2 - 4A + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} = q^3 \\ A = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} = q^3 \end{cases}$$

اگر فرض کنیم دنباله صعودی است، جمله هشتم بزرگترین جمله است.

$$\frac{a_8}{a_7} = \frac{a_1 q^7}{a_1 q^6} = q = (q^3)^{\frac{1}{3}} = (2 + \sqrt{3})^{\frac{1}{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

۲۴ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول:

در هر دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدر نسبت d ، جمله n ام از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ به دست می آید و اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند آن گاه $b^2 = ac$ است.

$$a_7, a_8, a_{12} \Rightarrow a_1 + 6d, a_1 + 7d, a_1 + 11d \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} (a_1 + 7d)^2 = (a_1 + 6d)(a_1 + 11d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 14a_1d + 49d^2 = a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 \Rightarrow 4a_1d = 17d^2 \Rightarrow d = \frac{4}{17}a_1$$

$$a_1 + d, a_1 + 4d, a_1 + 11d \xrightarrow{d=\frac{4}{17}a_1} \frac{9}{17}a_1, \frac{21}{17}a_1, \frac{49}{17}a_1$$

$$q = \frac{\frac{21}{17}a_1}{\frac{9}{17}a_1} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

روش دوم: اگر $a_m, a_n, a_p, \dots$ جملات یک دنباله حسابی باشند که با یکدیگر تشکیل دنباله هندسی می دهند قدر نسبت دنباله هندسی از رابطه $q = \frac{p-n}{n-m}$ به دست می آید.

$$q = \frac{p-n}{n-m} \Rightarrow q = \frac{12-5}{5-2} = \frac{7}{3}$$

۲۵ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول: در هر دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدر نسبت d ، جمله n ام از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ به دست می آید و اگر a, b, c جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند $ac = b^2$ است.



دنباله هندسی

$$a_3, a_5, a_{16} \rightarrow a_1 + 2d, a_1 + 6d, a_1 + 15d \rightarrow (a_1 + 2d)(a_1 + 15d) = (a_1 + 6d)^2$$

$$\rightarrow a_1^2 + 15a_1d + 2a_1d + 30d^2 = a_1^2 + 36d^2 + 12a_1d$$

$$\rightarrow 6d^2 - 5a_1d = 0 \rightarrow d(6d - 5a_1) = 0 \rightarrow 5a_1 = 6d \rightarrow a_1 = \frac{6}{5}d$$

$$\text{جملات: } \frac{6}{5}d + 2d, \frac{6}{5}d + 6d, \frac{6}{5}d + 15d \rightarrow \frac{16}{5}d, \frac{36}{5}d, \frac{81}{5}d \rightarrow q_{\text{هندسی}} = \frac{\frac{36}{5}d}{\frac{16}{5}d} = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

روش دوم: اگر a_m, a_n, a_p جملات یک دنباله حسابی باشند که با یکدیگر تشکیل دنباله هندسی می‌دهند آن‌گاه $q_{\text{هندسی}} = \frac{p-n}{n-m}$ است.

$$a_3, a_5, a_{16} \rightarrow q_{\text{هندسی}} = \frac{16-5}{5-3} = \frac{9}{2}$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴

۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴

۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴

۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴